

SERIE D'EXERCICES**EXERCICE 1**

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x - 2(1 - \cos x)}{5x^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}$$

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2}, & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + kx + 1, & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Déterminer le réel k pour que la fonction f soit continue au point 2.

$$2. \text{ Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Déterminer a pour que f soit continue sur D_f .

$$3. \text{ Soit } f \text{ la fonction définie par : } f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$$

Déterminer D_f , la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0; \pi] = E$

EXERCICE 3

1. Soit $g(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3}$; g est-elle prolongeable par continuité en 3 ? en -3 ? si oui donner le prolongement.

$$2. f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

3. Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la

$$\text{fonction } f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 2x - 1}.$$

EXERCICE 4

$$\text{Soient } f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|} \quad \text{et}$$

$$g(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$$

- C_f admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ?
- Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à O .

EXERCICE 5

$$\text{Soit } f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}.$$

- C_f passe-t-elle par le point $A(\frac{1}{5})$? justifier.
- Déterminer les abscisses des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -7x + 1$

PROBLEME 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1}$ et

C_f sa courbe représentative.

- Étudier la dérivabilité de f en -2. En déduire que C_f admet deux demi tangentes au point d'abscisse -2.
 - Dresser le tableau de variation de f .

2- a) Déterminer les réels a, b, c, a', b', c' tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} \quad \text{si } x \in [-2; +\infty[\setminus \{1\}$$

$$f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x-1} \quad \text{si } x \in]-\infty; -2]$$

- Montrer que C_f admet deux asymptotes obliques D_1 et D_2 dont on donnera les équations.
- Construire les demi tangentes au point d'abscisse -2, les droites D_1 et D_2 puis C_f .

PROBLEME 2

1) Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1.$$

- Étudier les variations g .
- Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$ et que de plus $0,7 \leq \alpha \leq 0,8$.
- En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}.$$

- Étudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que , pour tout élément x de D_h ; on a

$$h'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

c- En déduire le tableau de variation de la fonction h .

3) Tracer C_h sur un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

PROBLEME 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ on note } C_f \text{ sa courbe}$$

dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f .

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Qu'en déduire pour C_f ?

c) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

2- Montrer que C_f admet une asymptote oblique D_1 en $+\infty$ et une asymptote oblique D_2 en

$-\infty$. Préciser la position de C_f par rapport à D_1 et D_2 .

3- Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

a) Montrer que g définit une bijection de I vers un intervalle à J à préciser.

b) Étudier la dérivabilité de g^{-1} la réciproque de g sur I .

Calculer $(g^{-1})'(2)$. Donner alors une équation de la tangente à $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse 2.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$. Retrouver alors les résultats de la question 3-b).

4- Construire D_1 , D_2 , C_f et $C_{g^{-1}}$ dans le même repère.

PROBLEME 4

Soit $h(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$. On note C_h sa courbe représentative dans un repère orthogonale.

1- Écrire $h(x)$ sans valeurs absolues. Calculer les limites de h en $+\infty$ et $-\infty$.

2- Étudier la dérivabilité de h en $\frac{1}{2}$ et interpréter.

3- Démontrer que $4x + \sqrt{4x^2 - 1} < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$
et $4x + \sqrt{1 - 4x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2\sqrt{5}} \right[$. En déduire le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h .

4- Étudier les branches infinies et préciser la position de C_h par rapport à ses asymptotes éventuelles.

5- Tracer C_h et ses asymptotes dans un repère.

6- Soit f la restriction de h à $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$.

a) Montrer que f est une bijection de $\left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[$ sur un

intervalle K que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f . Donner les variations de f^{-1} .

b) Calculer $f^{-1}(0)$ puis donner une équation de la tangente à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

PROBLEME 5

I- Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f . f est-elle continue sur D_f .

2) Écrire f sans valeur absolue. Étudier la dérivabilité de f en 1 et -1.

3) Écrire $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable puis dresser le tableau de variation de f .

II- On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ 2x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2) Étudier les branches infinies de C_g courbe de g .

3) Dresser le tableau de variation de g .

4) Tracer avec soin C_g dans un repère orthonormé : unité 2cm.

III- Soit h la restriction de g sur $] -\infty; 0[$.

1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son domaine de définition. Étudier la dérivabilité de h^{-1} .

2) Déterminer $h^{-1}(x)$.

3) Montrer que la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $C_{h^{-1}}$ en $+\infty$.

4) Tracer $C_{h^{-1}}$ dans le même repère.

AU TRAVAIL

